Dip. di Ingegneria, Univ. Roma Tre
Prof. F. Martinelli

Probabilità e Statistica, 2016-17, I semestre
16 Febbraio, 2017

Appello del 16 Febbraio 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	

Esercizio 1.

1. Un insieme di dati $(x_1, \dots, x_n)$ ha media campionaria $\bar{x}$ e varianza campionaria s_x^2. Calcolare la media campionaria $\bar{y}$ e varianza campionaria s_y^2 dei nuovi dati $y_i = ax_i + b,\ i = 1, \dots, n$ dove a, b sono due numeri. [**2 punti**]

2. Sia N il numero ottenuto lanciando un dado equo. Sia X il numero di teste ottenute lanciando N volte una moneta equa (ossia se il dado $= 2$ la moneta viene lanciata due volte etc). Calcolare $\mathbb{P}(N = 2 \mid X = 1)$. [**3 punti**]

3. La varianza $\mathrm{Var}(N + X)$ sarà maggiore, uguale o minore della somma $\mathrm{Var}(N) + \mathrm{Var}(X)$? [**3 punti**]

Soluzione

- $\bar{y} = a\bar{x} + b, \quad s_y^2 = a^2 s_x^2$
-
$$\mathbb{P}(N = 2 \mid X = 1) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \times i(\frac{1}{2})^i}$$
- Maggiore perchè N e X sono correlate positivamente.

Nome:____

Esercizio 2. Siano X, Y due variabili continue con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda x^2 y & \text{per } 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Quanto deve valere λ ? [**2 punti**]
- Le variabili sono indipendenti ? [**2 punti**]
- Calcolare la media di X. [**2 punti**]

Soluzione

- $\lambda = 3/2$
- Si
- $3/4$.

Nome:______________________________________

Esercizio 3.[1] I pesi dei bambini di una scuola materna sono distribuiti secondo una normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Si sa che il 2.5% dei bambini pesa meno di 15 Kg e che il 2.5% pesa più di 35 kg.

- Determinare i valori di μ e σ. [**3 punti**]
- Prendendo un campione di 9 bambini quanto vale la probabilità che la media campionaria dei loro pesi sia almeno 28 Kg ? [**2 punti**]

Soluzione

- $\mu + 1.96\sigma = 35$ e $\mu - 1.96\sigma = 15$. Quindi $mu = 25$ e $\sigma = 10/1.96$.
- $\bar{X}_9 \sim \mathcal{N}(25, \sigma^2/9)$. Quindi

$$\mathbb{P}(\bar{X}_9 \geq 28) = \mathbb{P}(Z \geq \frac{28-25}{\sigma/3}) = \mathbb{P}(Z \geq \frac{9 \times 1.96}{10}) = 1 - \Phi(1.764) \approx 0.04$$

[1] Si ricorda che $z_{0.025} = 1,96$ e che $\Phi(1,764) \approx 0.96$

Nome:____

Esercizio 4. Consideriamo due popolazioni tali che ciascun individuo della popolazione i^{esima} possiede, independentemente dagli altri, una certa proprietà (ad esempio è ammalato) con probabilità p_i, $i = 1, 2$. Dati due campioni di taglia n_1 e n_2 presi dalla prima e dalla seconda popolazione rispettivamente, sia $\bar{X}_i$, $i = 1, 2$, la frazione di individui con la proprietà di cui sopra nel campione i^{esimo}.

- Qual'è la version standard della variabile $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$? [**2 punti**]
- Quanto devono essere grande n_1, n_2 per poter approssimare la distribuzione della versione standard di $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ con una $\mathcal{N}(0, 1)$? Quale risultato teorico sto usando ? [**2 punti**]
- Quale potrebbe essere un ragionevole intervallo di confidenza al 95% per la differenza $p_1 - p_2$? [**4 punti**]

Soluzione

Nome:____

Esercizio 5. Sia $(X_1, \dots, X_{16})$ un campione estratto da una popolazione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La varianza campionaria S^2 è risultata uguale a 190.

- Per decidere se $\sigma^2 \geq 100$ a un livello di significatività $\alpha = 5\%$ quale test mi conviene impostare:

  (a) $\quad H_0: \ \sigma^2 \leq 100 \quad H_1: \ \sigma^2 > 100$

  (b) $\quad H_0: \ \sigma^2 > 100 \quad H_1: \ \sigma^2 \leq 100$

  [**3 punti**]

- Per il test corretto dire quale è la statistica del test X_{ts} e scrivere la formula per il corrispondente *p-dei-dati* ? [**3 punti**]

Soluzione